

MODELADO NUMERICO DE LA PROPAGACION DE FRACTURA EN LAMINADOS ORTOTROPICOS UTILIZANDO EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Jairo F. Useche

- ✓ Este artículo forma parte del "Volumen Suplemento" S1 de la *Revista Latinoamericana de Metalurgia y Materiales (RLMM)*. Los suplementos de la RLMM son números especiales de la revista dedicados a publicar memorias de congresos.
- ✓ Este suplemento constituye las memorias del congreso "X Iberoamericano de Metalurgia y Materiales (X IBEROMET)" celebrado en Cartagena, Colombia, del 13 al 17 de Octubre de 2008.
- ✓ La selección y arbitraje de los trabajos que aparecen en este suplemento fue responsabilidad del Comité Organizador del X IBEROMET, quien nombró una comisión *ad-hoc* para este fin (véase editorial de este suplemento).
- ✓ La RLMM no sometió estos artículos al proceso regular de arbitraje que utiliza la revista para los números regulares de la misma.
- ✓ Se recomendó el uso de las "Instrucciones para Autores" establecidas por la RLMM para la elaboración de los artículos. No obstante, la revisión principal del formato de los artículos que aparecen en este suplemento fue responsabilidad del Comité Organizador del X IBEROMET.

MODELADO NUMERICO DE LA PROPAGACION DE FRACTURA EN LAMINADOS ORTOTROPICOS UTILIZANDO EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Jairo F. Useche

Depto. de Ingeniería Mecánica, Universidad Tecnológica de Bolívar, Cartagena de Indias, Colombia

E-mail: juseche@unitecnologica.edu.co

Trabajos presentados en el X CONGRESO IBEROAMERICANO DE METALURGIA Y MATERIALES IBEROMET
Cartagena de Indias (Colombia), 13 al 17 de Octubre de 2008

Selección de trabajos a cargo de los organizadores del evento

Publicado On-Line el 29-Jul-2009

Disponible en: www.polimeros.labb.usb.ve/RLMM/home.html

Resumen

El trabajo presenta una metodología para el modelado numérico del fenómeno de crecimiento de fractura en laminados simétricos ortotrópicos sometidos a esfuerzos cíclicos, utilizando el método de los elementos de contorno. La metodología propuesta ha sido implementada en un código computacional en MATLAB 7.0®, el cual permite desarrollar modelos numéricos para la predicción de trayectorias de propagación de fractura y resistencia residual de laminados ortotrópicos fracturados, basados en la teoría LEFM. Se desarrolla la formulación por elementos de contorno del problema, su implementación computacional y su aplicación al análisis de problemas específicos de crecimiento de fractura por fatiga, comparando predicciones computacionales con resultados obtenidos utilizando el método de los elementos finitos (MEF). El crecimiento de la fractura es modelado a través de un esquema incremental donde es utilizado el criterio de esfuerzos circunferenciales máximos para definir la dirección de crecimiento. La metodología propuesta ha demostrado su efectividad para predecir trayectorias de propagación y resistencia residual por fatiga, permitiendo su uso como herramienta de análisis en ingeniería, disminuyendo el costo computacional de análisis al ser comparado con modelos basados en discretización de dominio tales como el MEF.

Palabras Claves: Propagación de Fractura, Método de Elementos de Contorno, Laminados Ortotrópicos, Fatiga.

Abstract

In this work a boundary element formulation for the fatigue crack growth propagation analysis in symmetric orthotropic composites laminates is presented. The proposed methodology was implemented in computational code developed in MATLAB7.0®. This code is applied to predict the crack growth path propagation, critical crack length and residual fatigue life in fracture composite laminates, based on the Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM). The boundary element formulation for the proposed problem is showed. In order to model the crack propagation, an incremental crack extension algorithm and the Maximum Circumferential Tensile Stress Criterion were used. Application examples are presented and the results compared with those obtained from numerical models using the finite element method (FEM). Results shows that methodology proposed is effective to predict the behavior of cracked laminate symmetric orthotropic composite laminates under cycle loads diminishing computational cost of the analysis compared with models based on FEM.

Keywords: Crack growth, Boundary Element Method, Orthotropic Composites Laminates, Fatigue

1. INTRODUCCIÓN

La falla catastrófica de estructuras es causada por la propagación de fracturas más allá de un tamaño seguro. Estas fracturas, presentes de alguna forma en todo componente estructural, son el resultado de defectos de fabricación o de daños localizados generados durante su servicio y pueden crecer lentamente debido a procesos tales como creep o fatiga, entre otros (Broek [1]), provocando una disminución de su resistencia estructural y generando hacia futuro una falla catastrófica. La determinación de la tolerancia al daño, siendo esta

una propiedad estructural que determina la capacidad para sobrellevar de manera segura una fractura durante la vida útil de una estructura, es uno de los objetivos en el análisis y evaluación de fallas.

Adicionalmente, la determinación de la velocidad de crecimiento y del tamaño crítico, son parámetros que permiten determinar la estabilidad de la fractura y vida residual de un componente estructural.

En mecánica de la fractura, la determinación de los factores de intensidad de tensiones (SIFs) son

parámetros a través de los cuales la tolerancia al daño puede ser establecida. La gran dificultad para su determinación, desde un punto de vista de la mecánica de sólidos, es la ausencia de soluciones analíticas adecuadas que describan el comportamiento de cuerpos con geometrías y condiciones de cargas complejas y materiales no lineales (plasticidad, creep, etc.), encontrados en aplicaciones reales. Factores de intensificación de tensiones han sido encontrados utilizando las hipótesis planteadas de la teoría LEFM para problemas con geometrías y cargas simples (Aoki y Hasebe, [2]), las cuales son de utilidad limitada en ingeniería.

Si bien la mecánica de la fractura ofrece bases teóricas adecuadas para el estudio de tolerancia al daño y propagación de fractura, su aplicación práctica en ingeniería solo es posible a través del uso de herramientas computacionales que permitan obtener soluciones numéricas a las ecuaciones de gobierno que rigen un problema, obteniendo así soluciones más realistas.

El trabajo presenta una formulación matemática basada en el método de los elementos de contorno, que permite modelar laminados simétricos ortotropicos fracturados en estado de tensión o deformación plana y estudiar el fenómeno de propagación basado en la teoría lineal elástica de la mecánica de la fractura (LEFM). El desarrollo teórico se encuentra basado en el trabajo desarrollado por Portela [3] y en el trabajo de Sollero y Aliabadi [4]. La formulación ha sido implementada en un programa computacional desarrollado en MATLAB 7.0®. Se presentan ejemplos de aplicación en mecánica de la fractura que demuestran la efectividad del programa para predecir trayectorias de propagación, permitiendo su uso como herramienta de análisis para evaluación de daño en ingeniería.

2. ASPECTOS TEÓRICOS

A diferencia de los métodos de aproximación en el dominio, el método de los elementos de contorno (BEM) trabaja con la discretización del contorno donde son definidas ecuaciones integrales de gobierno del problema. En comparación con el método de los elementos finitos (FEM), en el BEM la dimensionalidad del problema es reducida, generando de este modo sistemas de ecuaciones de menor tamaño. Igualmente, BEM es superior al FEM en el tratamiento de problemas en mecánica de la

fractura, ya que no se requieren mallas altamente refinadas (y algoritmos especiales para su generación y actualización en el caso de problemas de propagación) al rededor de la punta de la fractura para capturar los altos gradientes de tensiones, tal como ocurre en el FEM.

2.1 Formulación Integral

La formulación por elementos de contorno para problemas en elasticidad lineal parte de considerar la formulación por residuos ponderados de las ecuaciones de Navier (Brebbia y Dominguez [5]):

$$\left(\frac{1}{1-2\nu} \right) u_{j,jl} + u_{l,jj} + \frac{1}{\mu} b_l = 0 \tag{1}$$

donde u_j son las componentes de desplazamiento, b_l son las fuerzas de cuerpo, ν es el modulo de Poisson y μ es el modulo cortante. Utilizando integración por partes se obtiene la ecuación integral:

$$\begin{aligned} \oint_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \oint_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \\ - \oint_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma + \oint_{\Gamma} t_k^* u_k d\Gamma \end{aligned} \tag{2}$$

En esta ecuación, t_k son tensiones aplicadas en el contorno, u_k^* y p_k^* son funciones de ponderación y $\sigma_{kj,j}^*$ representa el divergente del tensor de tensiones ponderado. La primera integral del lado izquierdo de esta ecuación puede ser transformada en una integral de contorno si se considera la solución fundamental de la ecuación (1), la cual es obtenida considerando una carga puntual en un dominio infinito:

$$\sigma_{kj,j}^* = - \delta_{ij} \tag{3}$$

De esta manera, y teniendo en cuenta la propiedad fundamental de la función *Delta de Dirac*:

$\oint_{\Omega} f \delta_{ij} d\Omega = f$ se obtiene una ecuación integral de contorno:

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta} u_{\beta}(\mathbf{x}') + \oint_{\Gamma} T_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u_{\beta}(\mathbf{x}) d\Gamma = \\ \oint_{\Gamma} U_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') t_{\beta}(\mathbf{x}) d\Gamma + \oint_{\Omega} U_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') b_{\beta}(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \tag{4}$$

donde $c_{\alpha\beta}$ es una constante que depende de la ubicación del punto de colocación ($c_{\alpha\beta} = 1$ para puntos en el dominio, $c_{\alpha\beta} = 1/2$ para puntos sobre el contorno y $c_{\alpha\beta} = 0$ para puntos por fuera del contorno). $T_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ y $U_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ son las *soluciones fundamentales para medios ortotrópicos* infinitos para tracción y desplazamiento, respectivamente, las cuales han que han sido tomadas como funciones ponderadoras en la ecuación (2). La anterior ecuación es la base del *método directo de los elementos de contorno*. Existen técnicas especiales para el tratamiento de la integral de dominio de las fuerzas de cuerpo, utilizadas para hallar una integral equivalente evaluada en el contorno, pero no serán tratadas aquí (ver Patridge, Brebbia y Wrobel [5]).

2.2 Formulación por Elementos de Contorno

Ya que en general no existe una solución analítica para la ecuación (4), esta puede hallarse a través del tratamiento numérico de las integrales, a través de la discretización geométrica del contorno utilizando elementos discretos y aproximando sobre ellos el campo de desplazamientos y tensiones. Varios tipos de elementos pueden ser utilizados, siendo los más comunes los elementos lineales y cuadráticos continuos o discontinuos.

Si se utilizan como puntos de colocación los mismos puntos que definen los elementos en el contorno y utilizando la siguiente aproximación para los campos de desplazamientos y tensiones al interior de un elemento cualquiera se tiene:

$$\begin{aligned} u_\beta &= \phi_1(\xi)u_\beta^1 + \phi_2(\xi)u_\beta^2 + \phi_3(\xi)u_\beta^3 \\ t_\beta &= \phi_1(\xi)t_\beta^1 + \phi_2(\xi)t_\beta^2 + \phi_3(\xi)t_\beta^3 \end{aligned} \tag{5}$$

(donde $\phi_i, i = 1 \dots 3$ son las funciones de forma de un elemento de borde cuadrático continuo o discontinuo). Reemplazando en (4) se obtiene un sistema de ecuaciones linealmente independiente, el cual puede ser escrito matricialmente como:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \hat{\mathbf{a}} \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \hat{\mathbf{a}} \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{G}}^{ij} \mathbf{t}^j + \hat{\mathbf{a}} \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is} \tag{6}$$

donde N es el numero de nodos en el contorno, \mathbf{u}^i es el vector de desplazamientos en el nodo i , \mathbf{t}^j es el vector de tracciones aplicadas en el contorno en el nodo j , y \mathbf{H} , \mathbf{G} y \mathbf{B} son matrices cuyos términos

contienen las soluciones fundamentales de la ecuación (1). Una vez obtenidos desplazamientos y tensiones en el contorno, pueden utilizarse puntos en el dominio para encontrar soluciones internas: desplazamientos, tensiones y deformaciones. De forma compacta y considerando todas las contribuciones para un nodo dado se tiene finalmente un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} + \mathbf{B} \tag{7}$$

2.3 Modelado de la Fractura

El anterior procedimiento no puede ser aplicado directamente a problemas de fractura, ya que sobre el contorno de esta discontinuidad existirán elementos superpuestos (nodos coincidentes), lo cual generaría un sistema de ecuaciones linealmente dependientes (sistema singular). Por tanto, para analizar problemas de mecánica de la fractura se hace necesario utilizar una variación del método de los elementos de contorno conocida como *método dual de elementos de contorno* (DBEM). En esta formulación, son escritas ecuaciones de tracción para los nodos sobre uno de los bordes de la fractura y ecuaciones de desplazamientos para los nodos en el borde opuesto de la misma. De esta manera se obtiene un sistema linealmente independiente de ecuaciones, lo cual asegura la solución única del sistema de ecuaciones resultante.

Derivando la ecuación (4) con respecto a las coordenadas espaciales y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{kl} &= u_{k,l} \end{aligned} \tag{8}$$

donde t_i es el vector de tracción, σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy, C_{ijkl} es el tensor de constantes elásticas y ε_{kl} es el tensor de pequeñas deformaciones, se obtiene la ecuación integral de tracción (ver Portela [3]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} t_\beta(\mathbf{x}') + n_\beta(\mathbf{x}') \int_\Gamma T_{\alpha\beta\gamma}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') u_\gamma(\mathbf{x}) d\Gamma = \\ n_\beta(\mathbf{x}') \int_\Gamma U_{\alpha\beta\gamma}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') t_\gamma(\mathbf{x}) d\Gamma + n_\beta(\mathbf{x}') \int_\Gamma U_{\alpha\beta\gamma}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') b_\gamma(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \tag{9}$$

donde n_β es el vector normal del elemento en el punto de colocación α y los kernels $T_{\alpha\beta\gamma}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ y

$U_{\alpha\beta\gamma}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ son encontrados derivando las soluciones fundamentales para desplazamiento y tracción.

2.4 Propagación de Fractura

La mecánica de la fractura provee criterios de fractura que permiten determinar tensiones críticas (SIFs críticos), dirección de propagación y dimensión crítica de una fractura. Varios criterios han sido propuestos para determinar la dirección de propagación de una fractura en materiales ortotrópicos. En el presente trabajo se utiliza el Criterio de Esfuerzo de Tracción Circunferencial Máximo (ETCM) cual establece que *la propagación de la fractura ocurrirá en la dirección del esfuerzo principal de tracción e inicial cuando este esfuerzo alcanza un valor critico relacionado con el factor de intensificación de esfuerzo (SIF) en modo I*. Para materiales ortotrópicos este factor de intensificación crítico está dado por:

$$K_{IC}^\theta = K_{IC}^{x_1} \sin^2(\theta + \phi) + K_{IC}^{x_2} \cos^2(\theta + \phi) \quad (10)$$

donde θ es la dirección de propagación y ϕ es el ángulo de inclinación de la fractura con respecto a los ejes de simetría del material (x_1-x_2). $K_{IC}^{x_1}$ y $K_{IC}^{x_2}$ son los factores críticos de intensificación de esfuerzo en modo I a lo largo de estos ejes. El criterio ETCM propuesto por Souma et al. [6] consiste en hallar el máximo de la función:

$$R_\theta = \frac{\sigma_\theta \sqrt{2\pi r}}{K_{IC}^\theta} \quad (11)$$

La dirección correspondiente a valor de θ para el cual R_θ es máximo, es la dirección de propagación de la fractura.

En el presente trabajo los SIF son calculados mediante extrapolación del campo de desplazamiento en los nodos próximos a la punta de la fractura (Albuquerque et al. [7]):

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\dot{y}} \\ \dot{\dot{p}} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{\pi/l}}{Det(\mathbf{D})} \mathbf{D} \begin{Bmatrix} u_1^B \\ u_2^B \end{Bmatrix} \quad (12)$$

donde u_1 y u_2 son los desplazamientos nodales en los elementos que definen la punta de la fractura y \mathbf{D} es

una matriz de constantes que dependen de la solución fundamental para medios anisotrópicos.

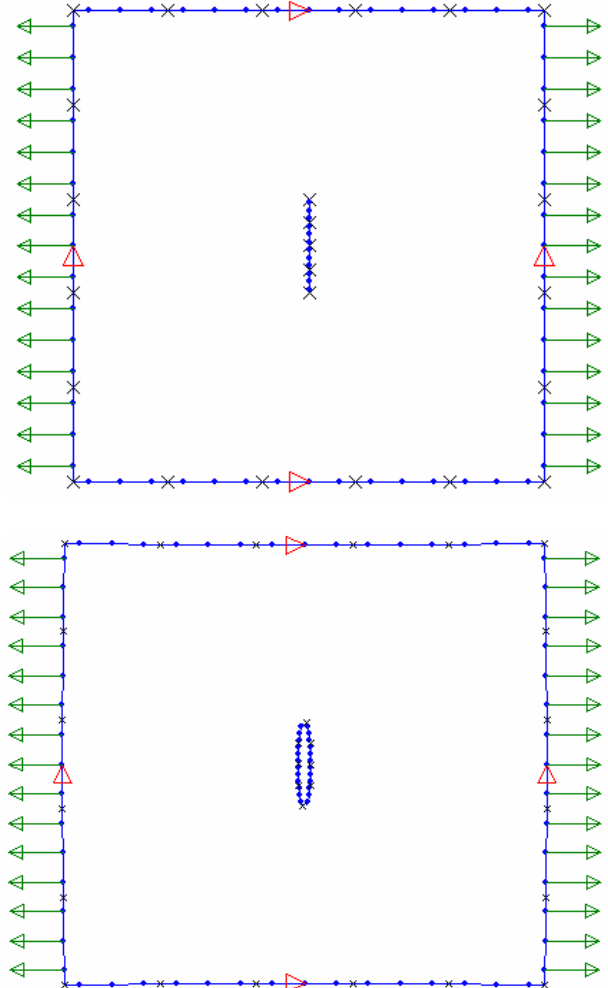


Figura 1. Arriba: Modelo por Elementos de contorno para placa con fractura central. Abajo: Geometría deformada de la placa.

3. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

La formulación por elementos de contorno desarrollada en la sección anterior fue implementada en un código computacional utilizando MATLAB 7.0®, bajo sistema operativo Windows XP®. El programa trabaja con elementos lineales cuadráticos discontinuos para la aproximación del campo de desplazamientos y de tensiones al interior de los elementos. Utiliza funciones de forma cuadráticas continuas para describir la geometría de los elementos. En el tratamiento numérico de las integrales de contorno se utilizó cuadratura de Gauss de 6 puntos para el tratamiento de integrales no

singulares y cuadratura de Gauss logarítmica con diez puntos para el tratamiento de integrales "débiles" (términos en la diagonal de la matriz **G**, (ver Dirgantara [9]). Para el tratamiento de las integrales "fuertes" que se presentan en los términos sobre la diagonal de la matriz **H**, se utilizó una expansión asintótica por series de Taylor, e integración gaussiana de 6 puntos. Se utiliza un esquema de actualización de las matrices **H** y **G** durante cada incremento de la fractura obteniéndose una disminución considerable en el costo computacional al reutilizar estas matrices (Portela [1]).

4. APLICACIONES

4.1 Placa con Fractura Central

Como verificación del programa se presenta inicialmente el análisis de una placa ortotrópica con fractura central de longitud $2a$ sujeta a esfuerzo de tensión en sus extremos tal como se muestra en la figura 1. Las propiedades de material son: $G_{xy} = 6.0$ MPa, $\nu_{xy} = 0.03$. El problema será analizado para varias realizaciones entre módulos elásticos $0.1 \leq E_x/E_y \leq 3.5$. Este problema fue propuesto por Bowie y Freeze [10]. Para este problema, los ejes de ortotropía se encuentran alineados con los ejes de la placa.

La figura 1 muestra el modelo por elementos de contorno propuesto. Los contornos de la placa han sido discretizados utilizando 28 elementos cuadráticos discontinuos y 8 elementos en cada borde de la fractura. Igualmente, en la figura 1 se muestra la geometría deformada de la malla de elementos de contorno. La figura 2 muestra una comparación de los SIFs encontrados utilizando BEM y los obtenidos por Bowie y Freeze.

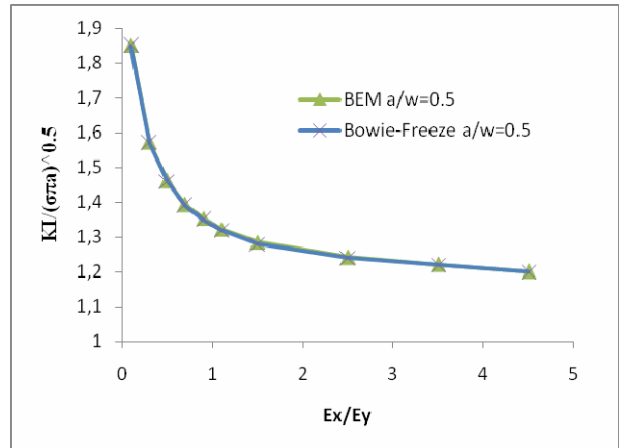
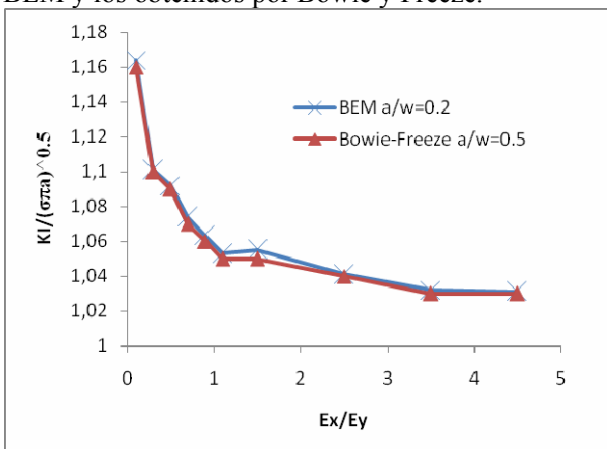


Figura 2. Comparación de los SIFs para placa con fractura central. Arriba: placa con relación $a/w=0.2$. Abajo: placa con relación $a/w = 0.5$

4.2 Propagación de Fractura: Placa con Agujeros

En este problema, el contorno de la placa ha sido discretizado inicialmente con 30 elementos cuadráticos discontinuos en el borde externo y 8 elementos en el borde que define los agujeros. Inicialmente 3 elementos modelan la fractura (ver figura 3). Se utilizan incrementos en el tamaño de la fractura iguales a $0.06667 m$. En esta misma figura se presenta la geometría de la placa modelada y la extensión final de la fractura.

El gráfico mostrado en la figura 4 muestra la variación de los factores de intensificación de tensiones en los modos K_I y K_{II} como función del número de incremento de extensión de la fractura. Se observa existe una disminución del factor en modo I con el incremento de la longitud de la fractura, mientras que el factor en modo II permanece casi constante y con valor muy pequeño.



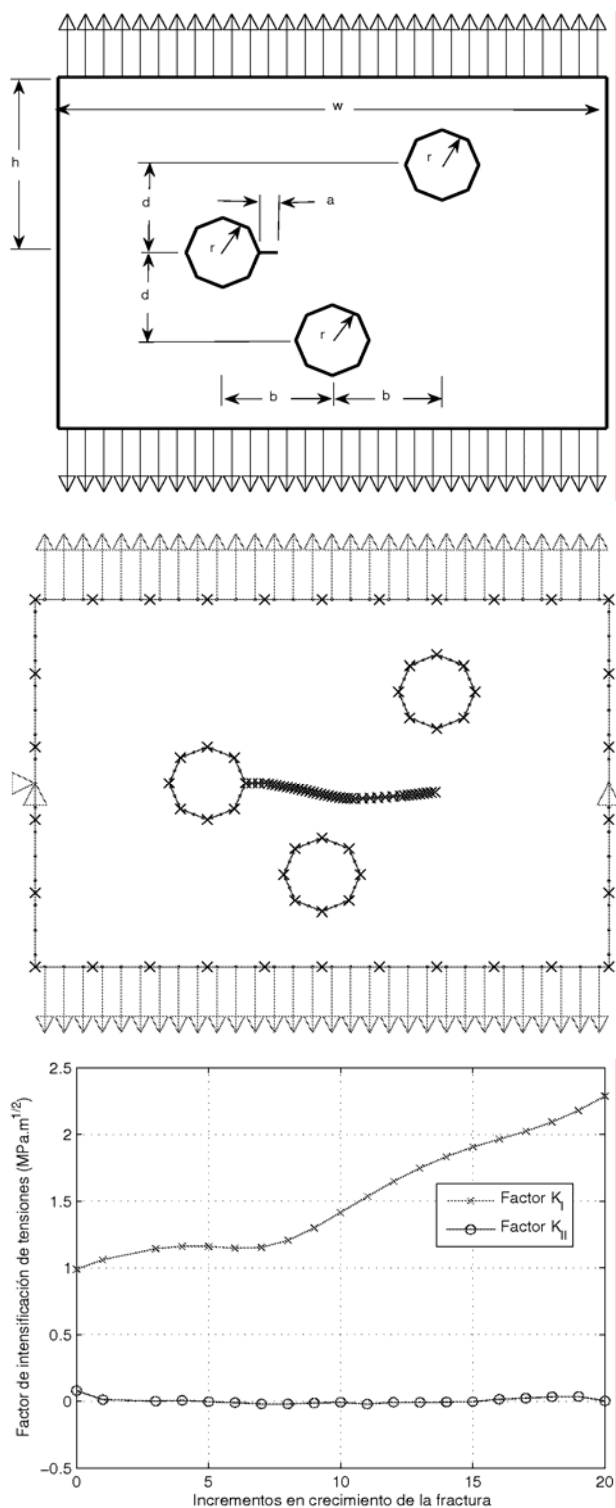


Figura 4. Arriba: geometría de la placa. Mitad: propagación de fractura para el último paso de carga. Abajo: variación de los factores de intensificación de esfuerzos como función del crecimiento de la fractura.

5. CONCLUSIONES

Fue presentada una formulación basada en el método de elementos de contorno para el modelado numérico de la propagación de fractura por fatiga. Esta formulación fue implementada en un código computacional desarrollado en MATLAB 7.0®. Los resultados obtenidos en los ejemplos analizados demuestran que los factores de intensificación de tensiones, las trayectorias de propagación y resistencia residual calculados, presentan una buena correlación con aquellos obtenidos experimentalmente y con aquellos reportados en la literatura especializada. Lo anterior demuestra la versatilidad y confiabilidad del método de los elementos de contorno en el tratamiento de problemas en mecánica de la fractura. La herramienta computacional desarrollada permite el análisis de propagación de fractura por fatiga, estimación de trayectorias de propagación y resistencia residual de componentes fracturados, lo cual la convierte en una herramienta valiosa para la toma de decisiones en labores de inspección de equipos, siendo posible su implementación en sistemas de monitoreo y control de fracturas en tiempo real.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Broek, D., Elementary Engineering Fracture Mechanics, The Netherlands, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
 [2] Aoki, S., Hasebe, N., Stress Intensity Factors Handbook, New York, Pergamon press, 1987.
 [3] Portela, A., Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack Growth, Tesis Ph.D., Southampton, Wessex Institute of Technology, 1992.
 [4] Sollero P., Aliabadi, M. H., Anisotropic Analysis Of Cracks In Composite Laminates Using The Dual Boundary-Element Method, Compos. Struct, 1995, **31**, 229 – 233.
 [5] Brebbia, C. A., Dominguez, J., Boundary Elements an Introductory Course, New York, McGraw-Hill, 1989.
 [6] Patridge, P. W., Brebbia, C.A., Wrobel, L. C. (1992), The dual reciprocity boundary element method, Southampton, Computational mechanics publications, Elsevier, 1989.
 [7] Saouma, V., Ayari, M.L., Leavell, D., Mixed Mode Crack Propagation in Homogeneous

Anisotropic Solids. Eng. Frac. Mech., 1987, **27**: 171-184.

[8] Albuquerque, E., Sollero P., Aliabadi, M. H., Dual Boundary Element Method for Anisotropic Dynamic Fracture Mechanics, Int. J. Num. Eng., 2004, **59**(9): 1187-1205.

[9] Dirgantara, T., Boundary Element Analysis of Cracks in Shear Deformable Plates and Shells, Southampton, WIT press, 2002.